Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v(x) = t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v'(x) = 2t \end{cases}$ d'où

$$G(x) = \left[-t^2 e^{-t}\right]_{Log2}^{x} + 2\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt = -x^2 e^{-x} + \frac{1}{2}(Log2)^2 + 2\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt$$

Faisons une intégration par parties pour : $\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

d'où $\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt = \left[-te^{-t}\right]_{Log2}^{x} + \int_{Log2}^{x} e^{-t}\,dt = -xe^{-x} + \frac{1}{2}Log2 - \left[e^{-t}\right]_{Log2}^{x}$

$$= -xe^{-x} + \frac{1}{2}Log2 + \frac{1}{2}$$

donc $G(x) = -x^2 e^{-x} + \frac{1}{2}(Log2)^2 - 2xe^{-x} + Log2 - 2e^{-x} + 1$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 1 + Log2 + \frac{1}{2}(Log2)^2$$

* on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -2e^{X} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -2xe^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} 2Xe^{X} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} -x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -x^2\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{X\to+\infty} -4\left(Xe^{-X}\right)^2 = 0 \quad \left(X = -\frac{x}{2}\right)$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) = 0$ et par suite $G(x)$ admet une limite en $+\infty$

qui est : $1 + Log2 + \frac{1}{2}(Log2)^2$

c) Il suffit de montrer que $\forall t \in [Log2, +\infty[: \ f(t) - 2t^2 e^{-t} \le 0$

$$f(t) - 2t^2 e^{-t} = t^2\left(\frac{1}{e^t - 1} - 2e^{-t}\right) = e^{-t}t^2\left(\frac{e^t}{e^t - 1} - 2\right) = \frac{e^{-t}t^2}{e^t - 1}(2 - e^t)$$ d'où

$\forall t \in [Log2, +\infty[$ on a $f(t) \le 2t^2 e^{-t}$